Curso de Teoría Cuántica de Campos.
Capítulo 65: Relación de completitud

Autor del curso: Javier García

Documento por: Roger Balsach

17 de octubre de 2021

1. Demostración de Roger

Para empezar la demostración, vamos a demostrar que ε_r^μ forman una base del espacio de Minkowski, esto quiere decir que cualquier vector del espacio de Minkowski se puede expresar como una combinación lineal de los vectores ε_0^μ, ε_1^μ, ε_2^μ, ε_3^μ. Esto lo podemos demostrar fácilmente usando técnicas básicas de Álgebra lineal. Debido a que el espacio de Minkowski es un espacio vectorial de dimensión 4, sabemos que cualquier conjunto de 4 vectores linealmente independientes formarán una base. Vemos que la condición

$$\varepsilon_r^{*\mu}\varepsilon_{s\mu} = \varepsilon_{r\mu}^{*}\varepsilon_s^\mu = g_{rs} \tag{1}$$

implica que necesariamente los vectores ε_r son linealmente independientes. En efecto consideremos la ecuación

$$a^r\varepsilon_r^\mu = a^0\varepsilon_0^\mu + a^1\varepsilon_1^\mu + a^2\varepsilon_2^\mu + a^3\varepsilon_3^\mu = 0$$

Multiplicando escalarmente por $\varepsilon_{s\mu}^*$ obtenemos

$$a^r\varepsilon_{s\mu}^*\varepsilon_r^\mu = a^r g_{rs} \equiv a_s = 0$$

Debido a que la métrica es invertible, encontramos los coeficientes $a^r = g^{rs}a_s = 0$. Por lo que obtenemos la proposición

$$a^r\varepsilon_r^\mu = 0 \Longleftrightarrow a^r = 0$$

Que demuestra que los vectores ε son linealmente independientes y, por lo tanto, una base del espacio.

Notemos ahora que podemos interpretar cualquier tensor de rango 2 (es decir, tensores con dos índices) como transformaciones que cogen un vector de nuestro espacio y devuelve otro vector. Dicho de otra forma, dado un tensor general con coordenadas $T^{\mu\nu}$, podemos definir una transformación que coge el vector v_μ y devuelve el vector definido como

$$(Tv)^\mu = T^{\mu\nu}v_\nu$$

Notemos que dos tensores son iguales si y solo si para cualquier vector v_μ devuelven exactamente el mismo vector $(Tv)^\mu$.

Finalmente, solo debemos notar que, dado que cualquier vector se puede escribir como una combinación lineal de los vectores ε, y los tensores definen transformaciones lineales, basta con que dos tensores transformen todos los vectores de la base de la misma forma para que esos tensores sean iguales.

Ahora ya tenemos todos los ingredientes para nuestra demostración, vamos a ver qué vectores obtenemos al transformar la base usando el tensor

$$\sum_r \xi_r\varepsilon_r^\mu\varepsilon_r^{*\nu}$$

Transformando los vectores de la base, $\varepsilon_{s\nu}$:

$$\left(\sum_r \xi_r\varepsilon_r^\mu\varepsilon_r^{*\nu}\right)\varepsilon_{s\nu} = \sum_r \xi_r\varepsilon_r^\mu\left(\varepsilon_r^{*\nu}\varepsilon_{s\nu}\right) = \sum_r \xi_r\varepsilon_r^\mu g_{rs} = \xi_s\varepsilon_s^\mu g_{ss}$$

Donde la última igualdad es consecuencia de que $g_{rs} = 0$ si $r \neq s$. Finalmente notemos que $g_{00} = 1$ y $g_{ss} = -1$ para $s \neq 0$. De forma similar $\xi_0 = 1$ y $\xi_s = -1$ para $s \neq 0$. Por lo que el producto $\xi_s \eta_{ss} = 1$ para todo s. En resumen,

$$\left(\sum_r \xi_r \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^{*\nu} \right) \varepsilon_{s\nu} = \xi_s \varepsilon_s^\mu g_{ss} = \varepsilon_s^\mu \tag{2}$$

Finalmente, el tensor $g^{\mu\nu}$ transforma los vectores de la siguiente forma:

$$g^{\mu\nu} \varepsilon_{s\nu} = \varepsilon_s^\mu \tag{3}$$

Por lo que los tensores $g^{\mu\nu}$ y $\sum_r \xi_r \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^{*\nu}$ transforman los vectores $\varepsilon_{s\nu}$ a ε_s^μ. Y en consecuencia, tienen que ser iguales.

$$\boxed{\sum_r \xi_r \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^{*\nu} = g^{\mu\nu}} \tag{4}$$

2. Demostración de Javier generalizada

Vamos ahora a resumir la demostración de Javier, generalizándola a polarizaciones complejas.
Ya sabemos que la relación se cumple escogiéndose la base

$$\epsilon_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ahora, vamos a escoger otra base, $\varepsilon_r^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \epsilon_r^\nu$. Debido a que queremos imponer que

$$g_{rs} = \varepsilon_r^{*\mu} g_{\mu\nu} \varepsilon_s^\nu = (\Lambda^\mu{}_\alpha \epsilon_r^\alpha)^* g_{\mu\nu} (\Lambda^\nu{}_\beta \epsilon_s^\beta) = \epsilon_r^\alpha \Lambda^{*\mu}{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \epsilon_s^\beta = \epsilon_r^\alpha g_{\alpha\beta} \epsilon_s^\beta \Longrightarrow \Lambda^{*\mu}{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

En forma matricial obtenemos la relación

$$\Lambda^\dagger g \Lambda = g \tag{6}$$

El conjunto de matrices que cumplen la ecuación anterior forma un grupo; vamos a ver que si Λ_1 y Λ_2 forman parte del grupo entonces $\Lambda_1 \Lambda_2$ también:

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^\dagger g (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^\dagger \Lambda_1^\dagger g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^\dagger g \Lambda_2 = g$$

Además, si Λ forma parte del grupo, también Λ^{-1}:

$$\Lambda^\dagger g \Lambda = g \Longrightarrow g = (\Lambda^\dagger)^{-1} g (\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\dagger g (\Lambda^{-1}) = g$$

Las otras propiedades de un grupo son fáciles de comprobar. Además, g es un elemento del grupo, ya que $g^2 = 1$ y $g^\dagger = g$

$$g^\dagger g g = g^\dagger = g$$

Por lo tanto, si Λ forma parte del grupo, entonces $\Lambda^\dagger$ también, ya que

$$\Lambda^\dagger g \Lambda = g \Longrightarrow \Lambda^\dagger = g \Lambda^{-1} g \tag{7}$$

Debido a que Λ^{-1} y g son elementos del grupo y que el producto de elementos también, nos da otro elemento.

Ahora podemos definir los vectores

$$u_r^\mu = (\Lambda^\dagger)^\mu{}_\nu \epsilon_r^\nu = \Lambda^{*\nu}{}_\mu \epsilon_r^\nu = \varepsilon_\mu^{*r}$$

Debido a que $\Lambda^\dagger$ forma parte del grupo definido arriba, los vectores u cumplen la propiedad

$$u_r^{*\mu} g_{\mu\nu} u_s^\nu = g_{rs} \Longrightarrow \varepsilon_\mu^r g_{\mu\nu} \varepsilon_\nu^{*s} = g_{rs} \tag{8}$$

Notemos ahora que $g_{\mu\nu} = \xi_\mu \delta_{\mu\nu}$, por lo que escribiendo la suma de forma explícita

$$g_{rs} = \sum_{\mu,\nu} \xi_\mu \varepsilon^r_\mu \delta_{\mu\nu} \varepsilon^{*s}_\nu = \sum_\mu \xi_\mu \varepsilon^r_\mu \varepsilon^{*s}_\mu$$

Cambiando los nombres de los índices:

$$\boxed{\sum_r \xi_r \varepsilon^\mu_r \varepsilon^{*\nu}_r = g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}} \tag{9}$$